جامعة البعث	**امتحان مقرر نظرية الاحتمالات**	**الاسم :**
كلية العلوم	**لطلاب السنة الثالثة رياضيات**	**المدة : 90 دقيقة**
قسم الرياضيات	**الفصل الدراسي الأول للعام 2016 – 2017**	**الدرجة : 100**

السؤال الأول (60 درجة):

أ) X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية $0<x<1 \quad ; \quad f(x)=1$ ، والمطلوب :

1) عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y=-2\ln X$. **2)** عين الدالة التوزيعية لـ Y. **3)** احسب $P(Y>2)$.

4) بفرض $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ عين الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

5) عين $V(3Z)$, $E(3Z)$.

6) بفرض أن Y_1, Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان ولكل منهما نفس توزيع Y عندئذٍ:

❶ احسب $E(Y_1 \cdot Y_2)$, $M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2)$, $COV(3Y_1, 3Y_2)$, $\rho(3Y_1, 4Y_2+2)$.

❷ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y_1, Y_2 . ❸ احسب $P(Y_1>1, Y_2>1)$.

❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U=\min\{Y_1, Y_2\}$. ❺ عين الدالة المولدة للعزوم المركزية المشتركة لـ Y_1, Y_2 .

ب) بفرض X , Y متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك بحيث $COV(X,Y)$ موجود والتباين لكل منها موجود عندئذٍ أثبت أنَّ: $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

السؤال الثاني(40 درجة):

أ) افرض أنَّ Y متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda=2$ ، وبفرض أنَّ التوزيع الشرطي لمتغير عشوائي X حيث Y هو:

$$P(x/y)=C_x^y\left(\frac{1}{2}\right)^y \quad ; \quad x=0,1,\ldots,y$$

، والمطلوب:

1) عين التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X , Y . **2)** عين التوقع الشرطي والتباين الشرطي والدالة المولدة الشرطية لـ Y حيث X .

3) عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=4Y$. **4)** عين كل من الدالة المولدة والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم المركزية للمتغير Y .

5) بفرض Y_1, Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان ولهما نفس التوزيع لـ Y بنفس الوسيط عندئذٍ احسب: $P(Y_1+Y_2=n)$ و $P(Y_1=k / Y_1+Y_2=n)$. **6)** عين التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ X .

ب) افرض X متغيراً عشوائياً دالته المميزة $\psi_X(t)=e^{-2|t|} ; \; t\in\mathbb{R}$ ، والمطلوب:

1) عين التوزيع الاحتمالي لـ X . **2)** عين الدالة التوزيعية لـ X . **3)** بفرض $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذ استخدم أسلوب الدالة المميزة لتعيين التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{X}$.

4) بفرض حجم العينة $n=2$ ، عندئذٍ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1, X_2

5) احسب $P(X_1<2, X_2<2)$.

حمص في **2017/02/02** — انتهت الأسئلة — مدرس المقرر: د. هيثم فرح

السؤال الأول:

أ)

1) لدينا X متغير عشوائي منتظم على المجال $[0,1]$ دالة كثافته هي:

$$f_X(x)=1 \ ; \ x\in[0,1]$$

ولدينا :

$$Y=-2\ln X \Rightarrow -\frac{1}{2}Y=\ln X \Rightarrow \boxed{X=e^{-\frac{1}{2}Y}} \Rightarrow \frac{dX}{dY}=-\frac{1}{2}e^{-Y} \Rightarrow \boxed{\left|\frac{dX}{dY}\right|=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}Y}}$$

ومنه نجد أن :

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Bigg|_{x=e^{-\frac{1}{2}y}}=1\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\right)\Bigg|_{x=e^{-\frac{1}{2}y}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} \Rightarrow \boxed{f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} \quad ; \ y>0}$$

واضح أن Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=\frac{1}{2}$.

2) بما أن Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=\frac{1}{2}$ فإن الدالة التوزيعية له هي :

$$F_Y(y)=1-e^{-\lambda y}=1-e^{-\frac{1}{2}y} \quad ; \ y>0$$

3) حساب $P(Y>2)$:

$$P(Y>2)=1-P(Y\le 2)=1-F_Y(2)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}(2)}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

4) بما أن $Y_1,Y_2,\ldots\ldots,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ فإن الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ هي:

$$M_Z(t)=M_{\sum_{i=1}^{n}Y_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{Y_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_Y(t)=\left[M_Y(t)\right]^n=\left[(1-2t)^{-1}\right]^n=(1-2t)^{-n}$$

واضح أن الدالة المولدة للمتغير العشوائي Z هي دالة مولدة لمتغير عشوائي غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=\frac{1}{2}$.

5) إيجاد $V(3Z)\ ,\ E(3Z)$:

بما أن المتغير عشوائي Z غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=1$ فإن :

$$E(Z)=\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{n}{(1/2)}=2n \quad , \quad V(Z)=\frac{\lambda}{\alpha^2}=\frac{n}{(1/2)^2}=4n$$

وبالتالي فإنَّ:

$$E(3Z)=3E(Z)=3(2n)=6n \quad , \quad V(3Z)=9V(Z)=9(4n)=36n$$

6) بما أنَّ Y_1,Y_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** ولكل منهما نفس توزيع Y فإنَّ:

❶ حساب المقادير :

$$E(Y_1.Y_2)=E(Y_1).E(Y_2)=(1).(1)=1$$

$$M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2)=M_{(Y_1)}(t_1).M_{(Y_2)}(t_2)=(1-2t_1)^{-1}.(1-2t_2)^{-1}=\frac{1}{(1-2t_1).(1-2t_2)}$$

$$COV\left(3Y_1,3Y_2\right)=9COV\left(Y_1,Y_2\right)=9(0)=0$$

$$\rho(3Y_1,4Y_2+2)=\rho(Y_1,Y_2)=0$$

❷ تعيين الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين Y_1,Y_2 :

$$F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1).F_{Y_2}(y_2)=\left(1-e^{-\frac{1}{2}y_1}\right).\left(1-e^{-\frac{1}{2}y_2}\right)\ ;\ y_1>0\ ,y_2>0$$

❸ حساب $P(Y_1>1,Y_2>1)$:

$$P(Y_1>1,Y_2>1)=P(Y_1>1).P(Y_2>1)=\left[1-P(Y_1\le 1)\right].\left[1-P(Y_2\le 1)\right]=$$

$$=\left[1-F_{Y_1}(1)\right].\left[1-F_{Y_2}(1)\right]=\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}(1)}\right)\right].\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}(1)}\right)\right]=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U=\min\{Y_1,Y_2\}$:

$$F_U(u)=P(U<u)=1-P(U\ge u)=1-P\left(\min\{Y_1,Y_2\}\ge u\right)=$$

$$=1-P(Y_1\ge u\ ,Y_2\ge u)=1-P(Y_1\ge u)P(Y_2\ge u)=$$

$$=1-\left[1-P(Y_1<u)\right]\left[1-P(Y_2<u)\right]=1-\left[1-F_{Y_1}(u)\right]\left[1-F_{Y_2}(u)\right]=$$

$$=1-\left[1-F_Y(u)\right]\left[1-F_Y(u)\right]=1-\left[1-F_Y(u)\right]^2=1-\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}u}\right)\right]^2$$

$$=1-\left[e^{-\frac{1}{2}u}\right]^2=1-e^{-u}\ ;u>0\Rightarrow f_U(u)=\frac{d}{du}F_U(u)=\frac{d}{du}\left[1-e^{-u}\right]=e^{-u}\ ;u>0$$

من الواضح أنَّ U متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=1$.

❺ إنَّ الدالة المولدة للعزوم المركزية المشتركة لـY_1,Y_2 هي:

$$E(Y_2)=E(Y_1)=E(Y)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1/2}=2$$

$$M_c(t_1,t_2)=e^{-t_1EY_1-t_2EY_2}M_{(Y_1,Y_2)}=e^{-2t_1-2t_2}\frac{1}{(1-2t_1).(1-2t_2)}=\frac{e^{-2(t_1+t_2)}}{(1-2t_1).(1-2t_2)}$$

ب) إثبات أنَّ $-1\le\rho(X,Y)\le 1$:

من أجل الوسيط $\lambda\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$V(X+\lambda Y)=E\left[(X+\lambda Y)-E(X+\lambda Y)\right]^2$$

$$=E\left[(X+\lambda Y)-EX-\lambda EY\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)+\lambda(Y-EY)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2+2\lambda(X-EX)(Y-EY)+\lambda^2(Y-EY)^2\right]$$
$$=E(X-EX)^2+2\lambda E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]+\lambda^2E(Y-EY)^2$$
$$=V(X)+2\lambda COV(X,Y)+\lambda^2V(Y)$$

إذاً أصبح لدينا:

$$V(X)+2\lambda COV(X,Y)+=V(X+\lambda Y)\geq 0\Rightarrow$$
$$V(Y)\lambda^2+2COV(X,Y)\lambda+V(X)\geq 0$$

يتضح هنا أنَّه لدينا كثير حدود من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط λ واشارته تكون موجبة عندما يتحقق $\Delta\leq 0$ أي:

$$\Delta=4COV^2(X,Y)-4V(X)V(Y)\leq 0$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$4COV^2(X,Y)-4V(X)V(Y)\leq 0\ \Rightarrow 4COV^2(X,Y)\leq 4V(X)V(Y)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$COV^2(X,Y)\leq V(X)V(Y)\ \Rightarrow \frac{COV^2(X,Y)}{V(X)V(Y)}\leq 1\quad ;V(X)>0\ ,V(Y)>0$$

وبأخذ الجذر التربيعي لطرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\frac{|COV(X,Y)|}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}\leq 1\quad\Rightarrow\quad\frac{|COV(X,Y)|}{\sigma_X\ \sigma_Y}\leq 1\ \Rightarrow\left|\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}\right|\leq 1$$
$$\Rightarrow|\rho(X,Y)|\leq 1\ \Rightarrow\boxed{-1\leq\rho(X,Y)\leq 1}$$

السؤال الثاني:

1) بما أنَّ Y متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda=2$ فإنَّ القانون الاحتمالي له يعطى بالشكل:

$$P_Y(y)=e^{-2}\frac{2^y}{y!}\ ;\ y=0,1,2,....,\infty$$

وبالتالي فإنَّ القانون الاحتمالي المشترك للمتغيرين X , Y يساوي:

$$P(x,y)=P(x/y)P(y)=$$
$$=\left[C_x^y\left(\frac{1}{2}\right)^y\right]\left[e^{-2}\frac{2^y}{y!}\right]=\left[\frac{y!}{x!(y-x)!}\frac{1}{2^y}\right]\left[e^{-2}\frac{2^y}{y!}\right]=\frac{e^{-2}}{x!(y-x)!}\ ;\ \begin{cases}x=0,1,....,y\\ y=x,x+1,...,\infty\end{cases}$$

2) إنَّ التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير العشوائي X حيث Y يكتب بالشكل:

$$P(x/y)=C_x^y\left(\frac{1}{2}\right)^{y+x-x}=C_x^y\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x}\ ;\ x=0,1,.....,y$$

من الواضح أنَّ المتغير العشوائي الشرطي X حيث Y من النمط الثنائي بالوسيطين $n=y$ و $p=\frac{1}{2}$ وبالتالي فإنَّ:

التوقع الشرطي لـ X حيث Y هو:

$$E(X/Y)=np=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}y$$

التباين الشرطي لـ X حيث Y هو:

$$V(X/Y)=npq=y\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}y$$

الدالة المولدة الشرطية لـ X حيث Y هو:

$$M_{(X/Y)}(t)=\left(q+pe^{t}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{t}\right)^{y}$$

3) تعيين التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=4Y$:

$$P_{Z}(z)=P\{Z=z\}=P\{4Y=z\}=P\left\{Y=\frac{z}{4}\right\}=P_{Y}\left(\frac{z}{4}\right)=e^{-2}\frac{\lambda^{\left(\frac{z}{4}\right)}}{\left(\frac{z}{4}\right)!}\;;\;z=0,4,8,\ldots$$

4) تعين كل من الدالة المولدة والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم المركزية للمتغير Y:

بما أنَّ Y متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda=2$ فإنَّ $E(Y)=\lambda=2$ وكما أنَّ:

الدلة المولدة لـه هي:

$$M_{Y}(t)=e^{-\lambda\left(1-e^{t}\right)}=e^{-2\left(1-e^{t}\right)}$$

الدالة التراكمية له هي:

$$K_{Y}(t)=\ln\left[M_{Y}(t)\right]=\ln\left[e^{-2\left(1-e^{t}\right)}\right]=-2\left(1-e^{t}\right)$$

الدالة المولدة للعزوم المركزية:

$$M_{(Y-EY)}(t)=e^{-tEY}M_{Y}(t)=e^{-2t}\left[e^{-2\left(1-e^{t}\right)}\right]=e^{-2\left(1+t-e^{t}\right)}$$

5) بفرض Y_1,Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان ولهما نفس التوزيع لـ Y بنفس الوسيط عندئذٍ احسب: $P\left(Y_1+Y_2=n\right)$ و $P\left(Y_1=k/Y_1+Y_2=n\right)$.

إنَّ الحدث $\{Y_1+Y_2=n\}$ يكتب بالشكل :

$$\{Y_1+Y_2=n\}=\bigcup_{i=0}^{n}\{Y_1=i,Y_2=n-i\}$$

وهذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى ، ومتنافية مثنى مثنى فإن :

$$P\{Y_1+Y_2=n\}=P\left\{\bigcup_{i=0}^{n}\{Y_1=i\,,Y_2=n-i\}\right\}=\sum_{i=0}^{n}P\{Y_1=i\,,Y_2=n-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P\{Y_1=i\}P\{Y_2=n-i\}=\sum_{i=0}^{n}P_{Y_1}(i)P_{Y_2}(n-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[e^{-2}\frac{2^i}{i!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-i)}}{(n-i)!}\right]=e^{-4}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2^i2^{(n-i)}}{i!(n-i)!}\right)=e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)2^i2^{(n-i)}$$

$$=e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_i^n\,2^i2^{(n-i)}=e^{-4}\frac{1}{n!}(2+2)^n=e^{-4}\frac{4^n}{n!};n=0,1,2,..$$

أي أن مجموع متغيرين عشوائيين بواسونيين لهما نفس الوسيط $\lambda=2$ هو متغير عشوائي بواسوني جديد وسيطه $\lambda=4$ أي مجموع الوسيطين .

وكما أنَّ:

$$P\{Y_1=k\,/Y_1+Y_2=n\}=\frac{P\{Y_1=k\,,\,Y_1+Y_2=n\}}{P\{Y_1+Y_2=n\}}=\frac{P\{Y_1=k\,,\,Y_2=n-k\}}{P\{Y_1+Y_2=n\}}$$

$$=\frac{\left[e^{-2}\frac{2^k}{k!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-k)}}{(n-k)!}\right]}{e^{-4}\frac{4^n}{n!}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2^k2^{(n-k)}}{4^n}\right)=C_k^n\frac{2^k2^{(n-k)}}{4^k4^{(n-k)}}=$$

$$=C_k^n\left(\frac{2^k}{4^k}\right)\left(\frac{2^{(n-k)}}{4^{(n-k)}}\right)=C_k^n\left(\frac{2}{4}\right)^k\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}\quad\Rightarrow$$

$$P\{X=k\,/\,X+Y=n\}=C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\quad;\quad k=0,1,2,....,n$$

واضح أن المتغير العشوائي الشرطي هو متغير عشوائي من النمط الثنائي وسيطاه n , $p=\frac{1}{2}$.

6) إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$P_X(x)=\sum_{y=x}^{\infty}P(x\,,y)=\sum_{y=x}^{\infty}\frac{e^{-2}}{x!(y-x)!}=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{1}{(y-x)!}=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{y-x=0}^{\infty}\frac{1}{(y-x)!}=$$

$$=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{e^{-2}}{x!}(e)=e^{-1}\frac{1^x}{x!}\quad\Rightarrow\quad\boxed{P_X(x)=e^{-1}\frac{1^x}{x!}\;;\;x=0,1,2,...}$$

وهذا يعني أنَّ X متغير عشوائي بواسوني بالوسيط $\lambda=1$.

ب) يتضح من الدالة المميزة $\psi_X(t)=e^{-2|t|};\ t\in\mathbb{R}$ أنَّ X متغير عشوائي من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,\ b=0$ وبالتالي فإنَّ:

1) التوزيع الاحتمالي لـ X هو:

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}\quad ;\ -\infty<x<+\infty$$

2) إن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,b=0$ تعطى بالعلاقة :

$$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\quad ,\ -\infty<x<+\infty$$

3) لدينا الدالة المميزة للمتغير العشوائي X هي :

$$\psi_X(t)=e^{-2|t|}$$

وبما أن $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ عينة عشوائية لـ X والمطلوب تعيين الدالة المميزة لـ $\overline{X}$ ، ثم تعيين التوزيع الاحتمالي $\overline{X}$.

$$\psi_{\overline{X}}(t)=\psi_{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)/n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)=\left[\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[e^{-2\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n=$$

$$=\left[e^{-2n\frac{|t|}{n}}\right]=e^{-2|t|}=\psi_X(t)$$

وهذا يعني أن لـ $\overline{X}$ نفس الدالة المميزة لـ X ، ومنه فإن للمتغير العشوائي $\overline{X}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ X ومنه فإن $\overline{X}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a=2$ والثاني $b=0$.

4) بفرض حجم العينة $n=2$ ، والمطلوب تعيين الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1,X_2:

بما أنَّ X_1,X_2 عينة عشوائية لـ X فهما مستقلان ولهما نفس التوزيع الاحتمالي لـ X وبنفس الوسطاء وبالتالي فإنَّ:

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1).F_{X_2}(x_2)=$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\ ,x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}$$

5) حساب $P(X_1<2\,,X_2<2)$.

$$P(X_1<2\,,X_2<2)=P(X_1<2).P(X_2<2)=F_{X_1}(2).F_{X_2}(2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

أو يمكن الحل بالشكل:

$$P(X_1<2\,,X_2<2)=F_{(X_1,X_2)}(2,2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489